Álgebra I (MA – 2221)
Guía de Ejercicios Nº 6

1.- Encontrar, para cada una de las siguientes situaciones, un ejemplo de anillo $A[x]$ y polinomios $f(x), g(x) \in A[x]$ no nulos tales que:
(a) $f(x)g(x) = 0$.
(b) $f(x) + g(x) = 0$
(c) $grad\big(f(x)g(x)\big) < grad\big(f(x)\big) + grad\big(g(x)\big)$
(d) $grad\big(f(x) + g(x)\big) < max\big\{grad\big(f(x)\big), grad\big(g(x)\big)\big\}$.
(e) $grad\big(f(x)g(x)\big) = grad\big(f(x)\big) + grad\big(g(x)\big)$.
(f) $grad\big(f(x) + g(x)\big) = max\big\{grad\big(f(x)\big), grad\big(g(x)\big)\big\}$.
.

2.- Sea A un anillo conmutativo con identidad. Probar que ningún polinomio mónico en $A[x]$ es un divisor de cero.

3.- Sea $f: A \to A'$ un homomorfismo de anillos. Probar que existe un homomorfismo de anillos entre $A[x]$ y $A'[x]$.

4.- Sean $f(x) = -2 + 3x^2 + 6x^3$ y $g(x) = -6 + 2x^2$ en $\mathbb{Z}_7[x]$. Hallar $f(x) + g(x)$ y $f(x)g(x)$

5.- Hallar el cociente y el resto de la división de $f(x)$ por $g(x)$ en los siguientes casos:
(a) $f(x) = -12x^3 + 7x^2 + x + 10,\ g(x) = 3x + 2,$ en $\mathbb{Q}[x]$
(b) $f(x) = 7x^4 - x^3 + 2x - 4,\ g(x) = 2x^2 - 3x - 2,$ en $\mathbb{Q}[x]$
(c) $f(x) = x^5 - x^3 + 2x - 2,\ g(x) = x^3 + x - 1,$ en $\mathbb{Z}_3[x]$
(d) $f(x) = 4x^4 + 2x^3 + x + 3,\ g(x) = 3x^2 + x + 4,$ en $\mathbb{Z}_5[x]$
(e) $f(x) = x^6 + 3x^5 + 4x^2 - 3x + 2,\ g(x) = 3x^2 + 2x - 3,$ en $\mathbb{Z}_7[x]$

6.- Determinar m y p, en función de q, de manera que el polinomio $f(x) = x^3 + px + q$ sea divisible por el polinomio $g(x) = x^2 + mx + 1$ en $\mathbb{R}[x]$.

7.- Determinar si los siguientes polinomios son irreducibles en el anillo que se indica:
(a) $f(x) = x^2 + 1,$ en $\mathbb{Z}_3[x]$
(b) $f(x) = x^2 + 1,$ en $\mathbb{Z}_5[x]$
(c) $f(x) = x^3 + x + 2,$ en $\mathbb{Z}_3[x]$
(d) $f(x) = x^3 + x + 1,$ en $\mathbb{Z}_5[x]$
(e) $f(x) = 6x^3 - 3x - 18,$ en $\mathbb{Q}[x]$
(f) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 2,$ en $\mathbb{Q}[x]$
(g) $f(x) = x^4 + 15,$ en $\mathbb{Q}[x]$
(h) $f(x) = x^7 - 47,$ en $\mathbb{Q}[x]$
(i) $f(x) = x^3 + 2x + 3,$ en $\mathbb{Z}_5[x]$
(j) $f(x) = 2x^{10} - 25x^3 + 10x^2 - 30,$ $\mathbb{Q}[x]$
(k) $f(x) = x^3 - 11,$ en $\mathbb{Z}_{17}[x]$
(l) $f(x) = x^3 - 9,$ en $\mathbb{Z}_{11}[x]$

8.- Escribir los siguientes polinomios como producto de polinomios irreducibles.
(a) $f(x) = x^4 + 4,$ en $\mathbb{Z}_5[x]$
(b) $f(x) = 2x^3 + x^2 + 1,$ en $\mathbb{Z}_3[x]$
(c) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16,$ en $\mathbb{C}[x]$
(d) $f(x) = x^2 - 6x + 3,$ en $\mathbb{Z}_7[x]$
(e) $f(x) = x^4 + x^3 + 2x,$ en $\mathbb{Z}_5[x]$
(f) $f(x) = x^4 - 3x^3 - 4x^2 - 6x + 4,$ $\mathbb{C}[x]$

Prof. María Teresa Varela

9.- Determinar todos los polinomios mónicos irreducibles:
(a) de grado 2 en $\mathbb{Z}_3[x]$.
(b) de grado 3 en $\mathbb{Z}_2[x]$.

10.- Sea A un dominio de integridad. Probar que los únicos elementos invertibles en $A[x]$ son los polinomios constantes.

11.- Sea A un anillo cualquiera. Probar que si I es un ideal de A, entonces $I[x]$ es un ideal de $A[x]$.

12.- (a) Sea $\varphi\colon \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}[x]$ un isomorfismo. Probar que $f(x)$ es irreducible en $\mathbb{Z}[x]$ si y solo si $\varphi\big(f(x)\big)$ es irreducible en $\mathbb{Z}[x]$.
(b) Usando el Criterio de Eisenstein, probar que $f(x) = x^2 + x + 1$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$.
(usar el isomorfismo $\varphi\colon \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}[x]$ dado por $\varphi\big(f(x)\big) = f(x+1)$)

13.- Sea $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{C}[x]$, se define el polinomio $\bar{f}(x)$ por:

$$\bar{f}(x) = \overline{a_0} + \overline{a_1}x + \cdots + \overline{a_n}x^n$$

donde $\overline{a_k}$ denota el complejo conjugado de a_k. Probar que:
(a) $r \in \mathbb{C}$ es una raíz de $f(x)$ si y solo si $\bar{r}$ es una raíz de $\bar{f}(x)$. (Ayuda: $\overline{f(r)} = \bar{f}(\bar{r})$)
(b) Si $f(x) \in \mathbb{R}[x] \subseteq \mathbb{C}[x]$ y r es una raíz compleja de $f(x)$, entonces $\bar{r}$ también es una raíz de $f(x)$.

14.- Determinar $a, b \in \mathbb{R}$ tales que el polinomio $f(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + ax + b$ admita la raíz $r = 1 + i$. Descomponer el polinomio como producto de irreducibles en $\mathbb{C}[x]$ y en $\mathbb{R}[x]$.

15.- Hallar un cuerpo finito sobre el cual $f(x) = x^2 - 2$ sea:
(a) irreducible (b) reducible

16.- Sea K un cuerpo y sea $r \in K$, $r \neq 0$ y tal que r es una raíz del polinomio:

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in K[x]$$

Probar que r^{-1} es una raíz de $g(x) = a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_0x^n$

Prof. María Teresa Varela